
SURFACES DE DEL PEZZO DE DEGRÉ 4 SUR UN CORPS C_1

par

Jean-Louis Colliot-Thélène

Résumé. — Sur toute surface de del Pezzo de degré 4 sur un corps C_1 de caractéristique zéro, tous les points rationnels sont R -équivalents. Plus généralement, ceci vaut sur tout corps parfait infini de caractéristique différente de 2.

Abstract. — On a del Pezzo surface of degree 4 over an infinite C_1 -field of characteristic zero, all rational points are R -equivalent. This more generally holds over any infinite perfect C_1 -field of characteristic different from 2.

1. Introduction

Soient k un corps, X une k -variété algébrique et $X(k)$ l'ensemble de ses points rationnels. On dit que deux points P et Q de $X(k)$ sont directement R -liés s'il existe un ouvert D de la droite projective \mathbf{P}_k^1 et un k -morphisme $D \rightarrow X$ tels que P et Q appartiennent à l'image de $D(k)$. La R -équivalence sur $X(k)$ est la relation d'équivalence engendrée par cette relation élémentaire. On note $X(k)/R$ l'ensemble des classes d'équivalence.

Pour $k = \mathbb{F}$ un corps fini et X une hypersurface lisse de degré $d \leq n$ dans $\mathbf{P}_{\mathbb{F}}^n$, un cas particulier d'une conjecture de Kollár (voir [9]) affirme que l'ensemble $X(\mathbb{F})/R$ est réduit à un élément. Pour $d = 3$ et F de cardinal au moins 8, ceci a été établi par Swinnerton-Dyer [14] et Kollár [9]. Un corps fini satisfait la propriété C_1 .

Soit k un corps C_1 de caractéristique zéro, et soit X une k -variété projective, lisse, géométriquement connexe. Supposons X géométriquement rationnellement connexe (voir [8]). Cette propriété est par exemple satisfaite si X est une hypersurface de degré $d \leq n$ dans \mathbf{P}_k^n , ou si X est géométriquement rationnelle, par exemple si c'est une surface fibrée en coniques sur la droite projective, ou si c'est une surface de del Pezzo.

Sans précision supplémentaire sur X ou sur k , les deux questions suivantes sont ouvertes :

(1) (Serge Lang) L'ensemble $X(k)$ des points k -rationnels de X est-il non vide ?

(2) [4, Question 10.11] Y a-t-il au plus une classe de R -équivalence sur $X(k)$?

Ces questions ont été plus particulièrement étudiées pour $k = \mathbb{C}(B)$ le corps des fonctions d'une courbe complexe et $k = \mathbb{C}((t))$ le corps des séries formelles en une variable. Dans ces deux cas, la question (1) a une réponse affirmative. Pour $k = \mathbb{C}(B)$, c'est le théorème de Graber, Harris et Starr [6]. Pour $k = \mathbb{C}((t))$, on sait établir le résultat comme conséquence dudit théorème [4, Thm. 7.5].

Pour $k = \mathbb{C}(B)$ et $k = \mathbb{C}((t))$, A. Pirutka [12] a donné une réponse affirmative à la question (2) lorsque l'on suppose de plus X rationnellement simplement connexe.

Déjà en dimension 2, donc pour les surfaces géométriquement rationnelles, et même pour les corps $k = \mathbb{C}(B)$ et $k = \mathbb{C}((t))$, la question (2) est ouverte.

Soit k un corps infini. Soit X une k -surface projective, lisse, géométriquement connexe, munie d'un k -morphisme $f : X \rightarrow \mathbf{P}_k^1$ dont la fibre générique est une conique lisse. Si k est un corps C_1 , toutes les fibres lisses possèdent des k -points. Si $X(k)/R$ est réduit à un élément, ou même simplement est de cardinal plus petit que le corps k , alors il existe un k -morphisme $g : \mathbf{P}_k^1 \rightarrow X$ qui composé avec $f : X \rightarrow \mathbf{P}_k^1$ est un k -morphisme dominant $h : \mathbf{P}_k^1 \rightarrow \mathbf{P}_k^1$. Le produit fibré Y de $f : X \rightarrow \mathbf{P}_k^1$ et $h : \mathbf{P}_k^1 \rightarrow \mathbf{P}_k^1$ est une k -surface fibrée en coniques $Y \rightarrow \mathbf{P}_k^1$ qui admet une section : c'est donc une k -surface k -rationnelle, et elle domine X . On conclut que X est k -unirationnelle. Soit Z une variété complexe de dimension 3 fibrée en coniques au-dessus du plan projectif $\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^2$. Soit $k = \mathbb{C}(t)$. En considérant un pinceau de droites dans $\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^2$, on voit que le corps des fonctions de Z s'identifie au corps des fonctions d'une k -surface projective et lisse X fibrée en coniques sur \mathbf{P}_k^1 . Si $X(k)/R$ est dénombrable, l'argument précédent montre que X

est k -unirationnelle. Comme $k = \mathbb{C}(t)$, on conclut que la variété Z est \mathbb{C} -unirationnelle. Or on ne s'attend pas à ce que toute variété complexe fibrée en coniques sur $\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^2$ soit \mathbb{C} -unirationnelle. On ne s'attend donc pas à une réponse affirmative à la question (2) en général.

Dans un récent article, Zhiyu Tian [15] établit $X(k)/R = 1$ pour les surfaces de del Pezzo de degré 4 sur le corps $k = \mathbb{C}((t))$. Dans cette note, j'observe qu'un théorème de Salberger et Skorobogatov [13] sur les surfaces de del Pezzo de degré 4 sur un corps parfait permet d'établir cet énoncé pour beaucoup de corps C_1 , en particulier pour $k = C(B)$ le corps des fonctions d'une courbe sur un corps C algébriquement clos de caractéristique zéro.

Théorème 1.1. — *Soit k un corps C_1 parfait, infini, de caractéristique différente de 2. Soit X une k -surface projective et lisse de l'un des types suivants :*

- (a) *Surface de del Pezzo de degré 4, c'est-à-dire intersection lisse de deux quadriques dans \mathbf{P}_k^4 .*
- (b) *Surface cubique lisse dans \mathbf{P}_k^3 possédant une droite définie sur k .*
- (c) *Surface X munie d'une fibration en coniques $X \rightarrow \mathbf{P}_k^1$ possédant exactement 5 fibres géométriques réductibles.*

Alors tous les k -points de X sont R -équivalents.

Sur tout corps k , on sait que les classes de surfaces considérées en (b) et (c) sont identiques. On sait que la contraction d'une k -droite sur une surface cubique lisse est une surface de del Pezzo de degré 4, et que l'éclatement sur une surface de del Pezzo de degré 4 d'un k -point non situé sur une courbe exceptionnelle est une surface cubique lisse possédant une k -droite. Pour ces énoncés classiques, on consultera [7] et [10]. On sait aussi (B. Segre, Manin [10, Theorem 29.4 and 30.1], [3, Prop. 2.3], Kollár [9], Pieropan [11]) que les k -surfaces considérées sont k -unirationnelles dès qu'elles contiennent un k -point.

Sur k un corps C_1 toutes les k -variétés considérées dans l'énoncé ont des k -points, et si k est infini ces k -points sont denses pour la topologie de Zariski. Une surface de type (a) est donc k -birationnelle à une surface de type (b), et inversement. L'ensemble $X(k)/R$ est invariant par éclatement d'un k -point. Il suffira donc d'établir l'énoncé pour les surfaces de del Pezzo de degré 4.

La trivialité de $X(k)/R$ pour k un corps C_1 de caractéristique zéro était connue pour les surfaces rationnelles fibrées en coniques avec au

plus 4 fibres géométriques réductibles [5], donc aussi pour les surfaces X de del Pezzo de degré 4 avec $\text{Pic}(X)$ de rang au moins 2.

La trivialité de $X(k)/R$ pour k un corps C_1 n'est pas connue pour une surface cubique lisse X k -minimale, i.e. avec $\text{Pic}(X)$ de rang 1. Sur $k = \mathbb{C}((t))$, c'est établi pour certaines surfaces cubiques dans [15].

2. Démonstration du théorème

Soit k un corps de caractéristique différente de 2.

Lemme 2.1. — *Soit $Q \subset \mathbf{P}_k^n$, $n \geq 2$ une quadrique lisse. Soit $U \subset Q$ un ouvert de Zariski. On a $U(k)/R \leq 1$. Plus précisément, deux k -points P et Q de U sont directement R -liés sur U .*

Démonstration. — [3, Lemma 3.22 (ii)]. □

Lemme 2.2. — *Soit $U \subset \mathbf{P}_k^m$ un ouvert non vide. Soit $n \geq 4$. Soit $X \subset \mathbf{P}_U^n$ une famille lisse de quadriques. Si k est un corps C_1 , pour tout ouvert Zariski non vide $W \subset X$, on a $W(k)/R = 1$. Plus précisément, deux k -points P et Q de W sont directement R -liés sur W .*

Démonstration. — Notons $p : X \rightarrow U$ la projection naturelle. Quitte à remplacer U par l'ouvert $p(W)$, on peut supposer $U = p(W)$. Soient $P, Q \in W(k)$, et soient $A = p(P)$ et $B = p(Q)$. Si $A = B$, alors P et Q sont deux k -points de la quadrique lisse $X_A \subset \mathbf{P}_k^n$, et P et Q sont directement R -liés dans l'ouvert $W \cap X_A \subset X_A$ d'après le lemme 2.1, donc aussi sur W . Supposons $A \neq B$. Soit $L \subset \mathbf{P}_k^m$ la droite joignant A et B . La restriction de $p : X \rightarrow U$ au-dessus de $L \cap U$ est une famille lisse de quadriques $Y \rightarrow L \cap U$ qui possède une section rationnelle car le corps $k(L)$ est un corps C_2 et toute forme quadratique en au moins 5 variables sur un tel corps a un point rationnel. Comme $L \cap U$ est régulier de dimension 1, toute telle section est morphique. La fibre générique Y_η de la famille $Y \rightarrow L \cap U$ est une quadrique lisse qui possède un point rationnel sur $k(\eta) = k(L)$, donc est $k(L)$ -birationnelle à un espace projectif sur le corps $k(L)$. On sait que la propriété d'approximation faible est invariante par de tels isomorphismes. On peut donc trouver un $k(L)$ -point de Y_η qui se spécialise en P au-dessus de A et en Q au-dessus de B . Le k -morphisme $\theta : L \cap U \rightarrow Y \subset X$ ainsi défini est une R -équivalence directe entre P et Q . Comme P et Q appartiennent à W , le k -morphisme $\theta^{-1}(W) \subset L$ est non vide et $\theta^{-1}(W) \rightarrow W$ est une R -équivalence directe entre P et Q dans W . □

Lemme 2.3. — Soient X une k -variété intègre, S un k -groupe réductif connexe, et $p : \mathcal{T} \rightarrow X$ un torseur sur X sous S . Soit $W \subset \mathcal{T}$ un ouvert, et soit $U = p(W) \subset X$ l'ouvert qui est son image par p . Si k est un corps infini de dimension cohomologique au plus 1, l'application $W(k) \rightarrow U(k)$ est surjective.

Démonstration. — Soit $P \in U(k)$. La fibre U_P de $W \rightarrow U$ est un ouvert non vide de la k -variété \mathcal{T}_P , qui est un espace principal homogène sous le k -groupe réductif connexe S . Comme la dimension cohomologique de k est au plus 1, cet espace principal homogène est trivial, donc la k -variété \mathcal{T}_P est k -isomorphe à S . Tout k -groupe réductif connexe sur un corps infini est k -unirationnel (Chevalley, Rosenlicht, Grothendieck [1, Thm. 18.2]), les k -points sont donc Zariski denses. Ainsi $U_P(k) \neq \emptyset$. \square

Rappelons le théorème [13, Thm. 3.8].

Théorème 2.4 (Salberger et Skorobogatov). — Soit k un corps parfait infini de caractéristique différente de 2. Soit X une surface de del Pezzo de degré 4 et $p : \mathcal{T} \rightarrow X$ un torseur universel sur X tel que $\mathcal{T}(k) \neq \emptyset$. Alors il existe un ouvert Ω du plan projectif \mathbf{P}_k^2 et une k -variété géométriquement intègre Y avec les propriétés suivantes :

- (i) La k -variété $Y \times_k \mathbf{P}_k^3$ est k -birationnelle à $\mathcal{T} \times_k \mathbf{P}_k^1$.
- (ii) La k -variété Y est un ouvert dans une famille lisse de quadriques dans \mathbf{P}_Ω^5 .

Théorème 2.5. — Soit k un corps C_1 , parfait, infini, de caractéristique différente de 2. Soit X une k -surface de del Pezzo de degré 4. L'ensemble $X(k)/R$ est réduit à un élément.

Démonstration. — Comme le corps k est C_1 et que X est définie par l'annulation simultanée de deux formes quadratiques en 5 variables, on a $X(k) \neq \emptyset$. Soit $p : \mathcal{T} \rightarrow X$ le torseur universel [2, (2.0.4)] de fibre triviale en un k -point de X . Ce torseur a une évaluation triviale en tout k -point de X . En effet le corps k étant C_1 est de dimension cohomologique au plus 1, et donc $H^1(k, S) = 0$ pour tout k -tore S . L'application induite $\mathcal{T}(k) \rightarrow X(k)$ est donc surjective [2, Lemme 2.7.1].

Gardons les notations du théorème 2.4. Notons $U \subset \mathcal{T} \times_k \mathbf{P}_k^1$ et $V \subset Y \times_k \mathbf{P}_k^3$ des k -ouverts non vides isomorphes.

Soit $p_1 : U \rightarrow X$ le morphisme lisse composé de l'inclusion $U \subset \mathcal{T} \times_k \mathbf{P}_k^1$, de la projection $\mathcal{T} \times_k \mathbf{P}_k^1 \rightarrow \mathcal{T}$ et de $\mathcal{T} \rightarrow X$. Soit $X_0 \subset X$ l'ouvert

image de p_1 . Il résulte du lemme 2.3 que l'application induite $U(k) \rightarrow X_0(k)$ est surjective.

Soient P, Q deux k -points de V . Soit $V_1 \subset Y$ l'ouvert image de V par la projection $Y \times_k \mathbf{P}_k^3 \rightarrow Y$, et soient A et B dans $V_1(k)$ les k -points images de P et Q . D'après le lemme 2.2, les points A et B sont directement R -liés sur V_1 . Il existe donc un k -morphisme $D \rightarrow V_1$ d'un ouvert $D \subset \mathbf{P}_k^1$ tel que A et B soient dans l'image de $D(k)$. La restriction de $V \rightarrow V_1$ à D est une famille d'ouverts de \mathbf{P}^3 . L'argument d'approximation faible au-dessus du corps $k(D)$ utilisé dans la démonstration du lemme 2.2 établit l'existence d'un k -morphisme $D' \rightarrow V$, avec D' ouvert de D relevant $D \rightarrow V_1$, tel que P et Q soient dans l'image de $D'(k)$. Ainsi P et Q sont directement R -liés sur V .

Combiné avec la surjectivité de $U(k) \rightarrow X_0(k)$, cela établit que deux k -points quelconques de l'ouvert non vide X_0 sont directement R -liés.

Pour établir $X(k)/R = 1$, on utilise la proposition 3.24 de [3, §3, Appendice B], qui garantit que l'application $X_0(k) \rightarrow X(k)/R$ est surjective. Cette proposition est énoncée sur un corps de caractéristique zéro. Dans le cas considéré ici d'une k -surface de del Pezzo de degré 4, k -unirationnelle, on vérifie que l'argument donné là, qui utilise la k -unirationalité de X , mentionnée dans l'introduction, et [3, §3, Appendice B, Prop. 3.23], vaut sur tout corps k infini de caractéristique différente de 2. \square

Remarque 2.6. — Dans la démonstration du théorème 2.5, l'hypothèse que le corps k est parfait vient de cette même hypothèse dans le théorème 2.4.

Références

- [1] A. Borel, Linear algebraic groups, Second enlarged edition, Graduate Texts in Mathematics **126** Springer Verlag (1991).
- [2] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, La descente sur les variétés rationnelles, II. Duke Math. J. **54** (1987) 375–492.
- [3] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc et P. Swinnerton-Dyer, Intersections of two quadrics and Châtelet surfaces, I. Journal für die reine und angewandte Mathematik **373** (1987) 37–107.
- [4] J.-L. Colliot-Thélène, Variétés presque rationnelles, leurs points rationnels et leurs dégénérescences, in *Arithmetic Geometry* (CIME 2007), ed. P. Corvaja et C. Gasbarri, Springer LNM **2009** (2011), p. 1–44.

- [5] J.-L. Colliot-Thélène et A. N. Skorobogatov, R -equivalence on conic bundles of degree 4, *Duke Math. J.* **54** (1987) 671–677.
- [6] T. Graber, J. Harris et J. Starr, Families of rationally connected varieties, *J. Amer. Math. Soc.* **16** (2002) 57–67.
- [7] V. A. Iskovkikh, Modèles minimaux des surfaces rationnelles sur les corps arbitraires (en russe), *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **43** (1979), no. 1, 19–43, 237. Trad. anglaise, *Math. USSR Sbornik* **14** (1980) 17–39.
- [8] J. Kollár, Rational curves on algebraic varieties, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Band* **32**. Springer, Heidelberg 1996.
- [9] J. Kollár, Looking for rational curves on cubic hypersurfaces, notes by Ulrich Derenthal, NATO Sci. Peace Secur. Ser. D Inf. Commun. Secur., Vol. **16**, Higher-dimensional geometry over finite fields, 92–122, IOS, Amsterdam, 2008.
- [10] Yu. I. Manin, Cubic forms, Algebra, geometry, arithmetic, North-Holland Mathematical Library Vol. **4**. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, second edition, 1986. Translated from the Russian by M. Hazewinkel.
- [11] M. Pieropan, On the unirationality of del Pezzo surfaces over an arbitrary field. Master thesis, available at <http://www.algant.eu/documents/theses/pieropan.pdf>, 2012.
- [12] A. Pirutka, R -equivalence on low degree complete intersections, *J. Algebraic Geom.* **21** (2012), 707–719.
- [13] P. Salberger et A. Skorobogatov, Weak approximation for surfaces defined by two quadratic forms, *Duke Math. J.* **63** (1991) 517–536.
- [14] H. P. F. Swinnerton-Dyer, Universal equivalence for cubic surfaces over finite and local fields. *Symposia Mathematica*, Vol. XXIV (Sympos., INDAM, Rome, 1979), pp. 111–143, Academic Press, London-New York, 1981.
- [15] Zhiyu Tian, R -equivalence on del Pezzo surfaces of degree 4 and cubic surfaces, <http://arxiv.org/abs/1307.1801v3>

soumis le 5 avril 2014, révisé le 2 août 2015; à paraître dans Taiwanese Journal of Mathematics

JEAN-LOUIS COLLIOT-THÉLÈNE, C.N.R.S., Université Paris Sud, Mathématiques,
Bâtiment 425, 91405 Orsay Cedex, France • *E-mail* : jlct@math.u-psud.fr